

DOI: <https://doi.org/10.34069/RA/2023.12.02>

Volumen 6, Número 12/julio-diciembre 2023

Álvarez Mejía, D., Hincapié Guerrero, D.J., Ospina Marulanda, L.P., Ocampo Sánchez, M.A. (2023). Estrategia didáctica de enseñanza del concepto de función para el desarrollo de competencias matemáticas. *Revista Científica Del Amazonas*, 6(12), 19-28. <https://doi.org/10.34069/RA/2023.12.02>

Estrategia didáctica de enseñanza del concepto de función para el desarrollo de competencias matemáticas

Didactic strategy for teaching the concept of function for the development of mathematical competences

Recibido: 2 de marzo de 2023

Aceptado: 16 de mayo de 2023

Autores:

Darío Álvarez Mejía¹

Diana Julié Hincapié Guerrero²

Liliana Patricia Ospina Marulanda³

María de los Ángeles Ocampo Sánchez⁴

Resumen

En este artículo se presentan los resultados del proyecto de investigación "Estrategia didáctica de enseñanza del concepto de función para el desarrollo de competencias matemáticas", financiado por la Universidad del Quindío. El estudio se motivó por los bajos niveles de desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas en el campo universitario, causados en parte por el enfoque tradicional de la enseñanza y la memorización, así como por la falta de compromiso de los estudiantes con el aprendizaje y los conocimientos previos insuficientes. El objetivo del estudio fue implementar estrategias didácticas para mejorar el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de programas de ingeniería en relación al concepto de función. La metodología utilizada fue de corte cualitativo, de tipo descriptivo y explicativo, utilizando la ingeniería didáctica. Del análisis previo se destaca la dificultad de los estudiantes para identificar relaciones funcionales, diferenciar el codominio y el rango, y utilizar registros de representación semiótica. Sin embargo, mediante la implementación de las situaciones didácticas diseñadas, se logró superar dichas dificultades. Finalmente, los estudiantes manifestaron que disfrutaron la metodología, gracias a su enfoque ameno, trabajo en equipo y la generación de una necesidad de aprendizaje.

Palabras clave: Estrategia didáctica, enseñanza, función, competencias matemáticas e ingeniería didáctica.

Abstract

This article presents the results of the research project "Didactic teaching strategy of the concept of function for the development of mathematical competences", funded by the University of Quindío. The study was motivated by the low levels of performance of students in the field of mathematics in the university context, caused in part by the traditional teaching approach and memorization, as well as the lack of commitment of students to learning and insufficient prior knowledge. The objective of the study was to implement didactic strategies to improve the development of mathematical competences in students of engineering programs in relation to the concept of function. The methodology used was qualitative, descriptive, and explanatory, using didactic engineering. From the previous analysis, the

¹ Magíster Educación: Desarrollo Humano, Profesor Universidad del Quindío, grupo de investigación GEDIMA, Armenia, Quindío, Colombia. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3005-4304>

² Magíster Educación, Profesora Universidad del Quindío, Colombia, grupo de investigación GEDIMA, Armenia, Quindío, Colombia. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1953-6326>

³ Doctor en Educación, Profesora Universidad del Quindío, Colombia, grupo de investigación GEDIMA, Armenia, Quindío, Colombia. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5091-1107>

⁴ Licenciada en Matemáticas, Universidad del Quindío, grupo de investigación GEDIMA, Armenia, Quindío, Colombia. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5500-8857>



difficulty of students in identifying functional relationships, differentiating the codomain and range, and using semiotic representation records is highlighted. However, through the implementation of the didactic situations designed, these difficulties were overcome. Finally, the students stated that they enjoyed the methodology, thanks to its enjoyable approach, teamwork, and the generation of a need for learning.

Keywords: Didactic strategy, teaching, function, mathematical competencies and didactic engineering.

Introducción

El bajo desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas al inicio de la educación superior es un problema que se evidencia en la mayoría de las instituciones y ha provocado en algunos casos que los estudiantes desistan continuar con sus estudios, una de las causas de lo anterior es que predomina una enseñanza tradicional que conlleva a un aprendizaje memorístico. En tal sentido, el objetivo de la investigación fue implementar una estrategia didáctica en la enseñanza del concepto de función para el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes de programas de Ingeniería. El marco referencial del proyecto se inscribe en la teoría de situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1986) y en la teoría de competencias planteada por Niss (2015). Además, propone por metodología la Ingeniería Didáctica, desde dicha perspectiva, se presenta el análisis histórico-epistemológico del concepto de función, el análisis cognitivo y el análisis didáctico, así como los análisis a priori y a posteriori y la confrontación de los mismos.

A manera de conclusión de los análisis preliminares se infiere que, para la enseñanza del concepto de función, no se considera la historia, los diferentes sistemas de representación semiótica y las transformaciones entre ellos; los problemas de aplicación son descontextualizados y prevalece la enseñanza de tipo tradicional. Así también, se evidenció en los análisis preliminares y a priori que algunas de las dificultades que han tenido los estudiantes frente al concepto de función son: no tener claro cuándo una relación es función, la diferencia entre codominio y rango, no utilizar los diferentes sistemas de representación semiótica o hacer transformaciones entre ellos, así como dificultades para resolver situaciones contextualizadas, además, presentaron vacíos en algunos conceptos previos. Pero se destaca que a través de la implementación de las situaciones didácticas diseñadas para las 3 categorías de análisis establecidas, los estudiantes lograron hacer la distinción entre relación y función, identificar el dominio, codominio y rango, superaron los vacíos en los conceptos previos, mejoraron notablemente respecto a la utilización de los diferentes registros de representación del concepto de función: sagital, tabular, gráfico, algebraico, escrito y verbal, y realizaron transformaciones entre ellos, lo cual se logró por medio de devoluciones de problema y retroalimentaciones, con el fin de que tomaran conciencia de los errores y comprendieran los conceptos con la ayuda de los demás compañeros y el profesor.

De igual forma, se observó que los estudiantes enfrentaron con habilidad la variedad de situaciones propuestas en las que lograron solucionar problemas relacionados con el concepto de función, así como que dominaran la simbología, las representaciones semióticas, definiciones y aplicaciones, lo cual se corresponde con las competencias planteadas por Niss (2015).

Marco Teórico

El marco teórico de la investigación se inscribió en la teoría de las situaciones didácticas desde los planteamientos de Brousseau (1986) y en el concepto de competencias desde los aportes de Niss (2015).

Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau

La teoría de situaciones de Brousseau (1986) está encaminada a dar un giro a la enseñanza tradicional a través de “devoluciones de problemas” a los estudiantes, con el objetivo de provocar el avance en el aprendizaje. Esto se realiza en el contexto de las *situaciones adidácticas* que están a cargo del estudiante y, en la enseñanza el profesor en su rol de mediador, toma cierta distancia y está atento para lograr que dichas situaciones evolucionen de acuerdo con el aprendizaje del saber matemático previsto, realizando el andamiaje mediante las respectivas retroalimentaciones y devoluciones.

Brousseau (1986) identifica tres tipos de situaciones adidácticas: de acción, de formulación y de validación, entendidas como se expresan a continuación:

- *Acción:* Frente a una situación planteada el estudiante actúa usando sus saberes para dar solución a la misma.
- *Formulación:* El estudiante organiza y simboliza sus acciones, utilizando un lenguaje propio del saber para formular sus resultados y comunicar el producto de su acción a los otros.
- *Validación:* El estudiante explica y defiende su producción con argumentos, tratando de convencer a los otros sobre la validez de sus resultados.

El autor también identifica la situación *didáctica de institucionalización*, en la cual el profesor conlleva a los estudiantes a tomar conciencia de las respuestas erróneas y acertadas; además, en esa confrontación de las respuestas a las situaciones de los estudiantes, el profesor alude a aspectos como la terminología, la simbología matemática y las representaciones de los conceptos objeto de estudio. Al respecto, Trujillo, Castro y Delgado (2007) refieren que en la situación de institucionalización (SI) el profesor desempeña “el papel de representante del saber encomendado a la institución escolar: Informa al estudiante de la terminología oficialmente aceptada y sus significados oficiales. Establece el orden teórico, la consistencia del conocimiento C y su relación con otros conocimientos ya establecidos” (p. 102).

Concepto de competencias

En relación con el concepto de competencia, en los últimos años se han generado distintos enfoques, entre ellos el concierne a la competencia matemática propuesto por Niss (2015, pp. 39-41) quien organiza las competencias en dos grupos, el primer grupo son las competencias que tienen que ver con la *habilidad de plantear y responder preguntas en y con las matemáticas*: 1) pensar matemáticamente, 2) plantear y resolver problemas matemáticos, 3) modelizar matemáticamente, 4) Razonar matemáticamente. El segundo grupo de competencias que plantea Niss (2015) hace referencia a la destreza o habilidad *en el manejo del lenguaje matemático y de las herramientas matemáticas*: 5) representar entidades matemáticas, 6) manejar símbolos y formalismos matemáticos, 7) comunicarse en, con, y sobre la matemática, 8) hacer uso de ayudas y herramientas (incluidas las tecnológicas).

Niss (2015) expresa que cada una de las ocho competencias puede ser percibida como «la habilidad de enfrentar con éxito una amplia variedad de situaciones en las que los retos matemáticos explícitos o implícitos de un determinado tipo se manifiestan» (pp. 40-41).

Metodología

La metodología de investigación se inscribe desde lo que plantea Artigue (1988) de la ingeniería didáctica, la cual establece las siguientes fases:

1. Análisis preliminares;
2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería;
3. Experimentación;
4. Análisis a posteriori y de evaluación.

A continuación, se describen cada una de las fases:

1. La fase de los análisis preliminares:

De acuerdo con lo que refiere Artigue (1988, p. 288), en la fase de los análisis preliminares se debe indagar acerca de: el análisis «de la enseñanza usual y sus efectos; el análisis de las concepciones de los alumnos, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución; el análisis del campo de restricciones en que se va a situar la realización didáctica efectiva».

Además, Artigue (1988, p. 289) plantea que el análisis de las restricciones se efectúa distinguiendo tres dimensiones: «la dimensión epistemológica asociada a las características del saber en juego; la dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al que se dirige la enseñanza; la dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza».

Frente a esta fase, en la investigación se hizo *el análisis preliminar* considerando inicialmente el análisis histórico-epistemológico. Para ello, se realizó un análisis en forma cronológica de la evolución del



concepto de función a través de la historia, lo cual fue fundamental para realizar el diseño de las situaciones didácticas de la investigación. Posteriormente, se hizo el análisis cognitivo, teniendo en cuenta lo que se plantea en el estado del arte acerca de algunas dificultades u obstáculos cognitivos que han tenido los estudiantes frente al concepto de función y se realizó también una prueba para analizar la comprensión que tenían los estudiantes que ya habían visto dicho concepto. Luego, se realizó el *análisis didáctico* en torno del concepto de función, teniendo en cuenta lo encontrado en el estado del arte, el análisis de los libros más usados para la orientación del concepto y la forma como algunos profesores lo enseñan, lo cual manifestaron en entrevistas.

2. La fase de la concepción y del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería

Teniendo en cuenta lo que plantea Artigue (1988), este análisis a priori comprende una parte descriptiva y otra predictiva, es un análisis centrado sobre las características de las situaciones a-didácticas que se quieren constituir en torno del concepto de función y donde se va a investigar cómo se hace la devolución a los estudiantes. En tal perspectiva, en la investigación se realizó el análisis a priori considerando la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica en relación con dicho concepto.

Para la primera se diseñó y posteriormente se aplicó una prueba a los estudiantes que no habían visto el tema de función, dicha prueba estuvo constituida por preguntas sobre saberes previos necesarios para abordar el tema y preguntas acerca del concepto y sobre el manejo de los diferentes sistemas de representación (gráfico, algebraico, tabular, sagital y verbal), posterior a ello, se hizo el análisis de lo que realizaron los estudiantes.

En cuanto a la segunda, se establecieron tres categorías de análisis definidas así: *categoría 1*: Relaciones y funciones; *categoría 2*: Dominio, codominio y rango de una función (variables dependientes e independientes), y *categoría 3*: Sistemas de representación Semiótica (transferencias de un sistema de representación a otro). Para cada una de las categorías se diseñaron situaciones didácticas teniendo en cuenta los planteamientos de Brousseau (1986). El análisis a priori de la dimensión didáctica se hizo por cada una de las categorías, para lo cual se realizó la descripción general de las situaciones didácticas, se planteó el propósito de las mismas, la duración de las sesiones, las variables didácticas, se describieron los registros de representación semiótica por utilizar; y se planteó la metodología de trabajo, se analizaron las dificultades y acciones esperadas de los estudiantes para cada una de las situaciones propuestas.

3. Experimentación, análisis a posteriori y validación

En esta fase se llevó a cabo la experimentación, es decir, se desarrollaron desde lo que plantea Brousseau (1986), las situaciones adidácticas de acción, formulación, validación y didáctica de institucionalización en torno del concepto de función y se realizó el análisis de las mismas.

En la fase de experimentación se implementaron las situaciones didácticas diseñadas y planteadas en el análisis a priori para cada una de las tres categorías, lo cual se hizo en las clases programadas para la asignatura de Cálculo Diferencial con estudiantes de primer semestre de Ingeniería Civil. Es de resaltar que se solicitó permiso a la directora del programa y se pidió a los estudiantes los consentimientos informados para participar del estudio.

Para el desarrollo de las sesiones de clase se conformaron 7 grupos, cada uno de 5 estudiantes, los grupos se denominaron (Grupo G) G1, G2, G3, G4, G5, G6 y G7 y se les entregó la guía de trabajo correspondiente a cada categoría. Por tanto, en la situación a didáctica de acción (SA), el grupo de estudiantes actuó frente a las situaciones planteadas; en la situación a didáctica de formulación (SF), los estudiantes propusieron la solución a las situaciones y la profesora se dirigía a cada uno de los grupos para escuchar sus inquietudes, verificar los procesos que desarrollaban y hacía las devoluciones de problema frente a las dificultades que observaba. Posteriormente, realizó el proceso de validación haciendo la confrontación con todos los grupos para hacer las validaciones de las respuestas y realizó el proceso de institucionalización, es decir, la profesora actuó para analizar que el conocimiento construido por los estudiantes fuera el saber matemático previsto para cada categoría.

Para el análisis de las situaciones didácticas y adidácticas se hizo uso de un diario de campo, se realizaron entrevistas a los estudiantes para conocer la percepción frente al trabajo realizado durante el proceso de

implementación de las situaciones didácticas, además, se realizaron grabaciones de las clases, para ello se solicitó el permiso en el programa donde se llevó a cabo la investigación y se les pidió a los estudiantes el consentimiento informado.

Posteriormente, se realizó el **análisis a posteriori**, que de acuerdo con lo que plantea Artigue (1988, p. 297), “se apoya sobre el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación: observaciones realizadas de las situaciones didácticas, pero también las producciones de los estudiantes en su actividad de estudio en clase o extraclase, estos datos se pueden complementar con los obtenidos de la utilización de los métodos externos como: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas en diversos momentos de la enseñanza o a su finalización”. Por tanto, se realizó la confrontación de los dos análisis: a priori y a posteriori con el fin de analizar la eficacia de las estrategias didácticas propuestas para el aprendizaje del concepto de función.

Resultados y discusión

Teniendo en cuenta las fases de la ingeniería didáctica que plantea Artigue (1988), se presentan los resultados de los análisis preliminares desde las dimensiones histórico-epistemológica, cognitiva y didáctica, y desde la confrontación de los análisis a priori y a posteriori

Dimensión Histórico-Epistemológica

A continuación, se presenta una aproximación desde la dimensión histórico-epistemológica del concepto de función. Para ello se tuvo en cuenta los artículos de Ugalde (2014), Farfán y García (s.f.) y de Youschkevitch (1976), los cuales fueron centrales para ahondar en cómo fue evolucionado el concepto de función a través de la historia. Así, en la época antigua (600 AC - siglo XVI), se realizaron estudios de fenómenos naturales, se consideraba la dependencia entre dos cantidades, que representaban a través de tablas de arcilla y papiros, utilizaban el sistema de representación algebraico, pero de manera escrita o en palabras. En los Siglos XVII y XVIII, se inició el trabajo con el Sistema Cartesiano de Coordenadas, se empezó a utilizar la concepción de variable independiente y dependiente, aparece la primera definición impresa del concepto como una expresión analítica. Así también, se utiliza por primera vez el símbolo $f(x)$. En los Siglos XIX y XX se dieron definiciones más precisas del concepto de función y se hace mayor énfasis en la concepción de dominio y codominio, además, se refirió que una función podía ser expresada, incluso solamente con palabras. Por tanto, se daban definiciones de la función más concretas y se alcanzan altos grados de generalidad del concepto como se define actualmente.

Dimensión Didáctica:

Para el análisis de la dimensión didáctica del concepto de *función*, se consideraron investigaciones realizadas sobre la enseñanza del concepto, además del análisis de los libros de texto que utilizan los profesores para la orientación del tema y, las entrevistas realizadas a los profesores sobre la forma en que enseñan el concepto.

Análisis didáctico del concepto de función desde el estado del arte

En lo concerniente al concepto de función, autores como Ospina (2012), Mena y Henao (2018), García et al., (2018), expresan que en los contextos escolares el concepto de función se aborda de forma tradicional, en la que los estudiantes memorizan fórmulas, se da prioridad a las representaciones de tipo algebraico y los problemas que se abordan son descontextualizados, privando a los estudiantes de la oportunidad de analizar fenómenos de la vida cotidiana en la que está presente dicho concepto.

Así también, en las investigaciones de Andrade y Saraiva (2012), Amaya (2020); Correa y García (2020); Costa y Sombra (2019); Cuevas y Díaz (2014); Espinoza (2020); Sierpiska (1992); Cervi y Nehring (2021), han aportado estrategias para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función y resaltan entre varios aspectos: la importancia de ahondar en el desarrollo histórico del concepto para el diseño de las situaciones didácticas de enseñanza, así como el uso de los diferentes sistemas de representación semiótica y las transformaciones entre ellos para una mejor comprensión del concepto. Además, destacan como aspecto relevante presentar a los estudiantes situaciones de la vida real en las que puedan identificar



cambios y regularidades, como también, expresar matemáticamente a través de funciones dichos fenómenos.

De otro lado, autores como Díaz (2008) señalan que es un concepto matemático transversal en los niveles escolares de bachillerato y educación superior, importante para modelar fenómenos de otras disciplinas. Refiere también el autor que los estadios a través de los cuales pasan los estudiantes cuando aprenden de forma explícita las funciones son “primero aprenden que una función está compuesta de tres subconceptos: dominio, rango y criterio de correspondencia. Después aprenden que las funciones pueden representarse de varias formas, diagramas, representaciones verbales, gráficas y algebraicas” (p. 37). Lo anterior llama la atención sobre la necesidad de abordar en la enseñanza del concepto de función lo relacionado con los sistemas de representación semiótica como también lo refiere Duval.

Análisis de los libros de texto que utilizan los profesores para la orientación del tema

Un aspecto que influye en la enseñanza del concepto de función son los textos utilizan los docentes; algunos de los más utilizados son: Cálculo de Larson y Hostetler, Cálculo de Leithold, Cálculo Purcell, de Apóstol y de Stewart. A continuación, se exponen algunos aspectos generales de la revisión de libros de texto:

- En lo referente a la composición de las unidades, se inicia con una introducción al concepto de función, luego se da la definición de dominio y rango, se presentan los tipos de funciones y al finalizar problemas de aplicación.
- El concepto se enseña a través de la definición, ejemplos, se hace énfasis en la gráfica de funciones y la tabla de valores, los problemas de aplicación que se proponen son descontextualizados y solo algunos textos incluyen lo relacionado con la historia del concepto.
- Con respecto de los sistemas de representación semiótica, los más utilizados son: verbal, gráfica, tabular y sagital, pero solo en el texto de Stewart se hacen transformaciones de un sistema de representación a otro.

Análisis de las entrevistas realizadas a los profesores sobre la forma en que enseñan el concepto

Las respuestas dadas por los profesores en las entrevistas, suministran información importante en lo que refiere al análisis didáctico desde lo que plantea la ingeniería didáctica. En tal sentido, se infiere que la enseñanza del concepto de función se ha orientado de forma tradicional, considerando que por las buenas explicaciones los estudiantes aprenden. Ha faltado en tal sentido, que los profesores a la hora de preparar las clases de este concepto fundamental y básico para los otros temas del cálculo, tengan en cuenta la historia, la evolución del concepto, además de indagar sobre investigaciones realizadas que dan cuenta de las dificultades y obstáculos que tienen los estudiantes en el aprendizaje del tema. Así como plantear situaciones didácticas que les permitan a los estudiantes construir el concepto.

Se concluye de la **dimensión didáctica** que en la enseñanza del concepto de función no se le da prioridad a la historia, la enseñanza dominante es de tipo tradicional, no se utilizan los diferentes sistemas de representación semiótica. De lo que resulta relevante diseñar e implementar situaciones didácticas para la construcción del concepto de función por parte de los estudiantes con la orientación del profesor, con el propósito de que adquieran la comprensión del mismo.

Dimensión cognitiva

Algunas de las dificultades u obstáculos cognitivos que han tenido los estudiantes frente al concepto de función desde lo encontrado en el estado del arte en autores como Trujillo et al (2007); Castro y Díaz (2012); Delgado y Azcárate (1996); Artigue (1998), Higuera (1998); Hussain y Mohammed (2022), Roldán (2013) y desde la prueba que se realizó a los estudiantes que ya habían visto el tema de función, se destacan las siguientes: no tener claro cuando una relación es función, utilizar los diferentes sistemas de representación semiótica o hacer transformaciones de un sistema de representación a otro; además de dificultades para resolver situaciones contextualizadas por la falta de claridad del concepto de variable dependiente e independiente.

Confrontación análisis a priori y a posteriori

En relación con el análisis a priori se destaca que, se realizó una prueba diagnóstica a los estudiantes que no habían visto el tema de función y se evidenció que tenían dificultad para establecer la diferencia entre relación y función, y entre codominio y rango, además, presentaban vacíos en algunos conceptos previos. En el proceso de experimentación de las situaciones didácticas se destaca que varios estudiantes presentaban dificultad para encontrar la regla de correspondencia y hubo casos donde no la sometían a comprobación con varios valores para validarla y presentaban dificultad en representar dichos conjuntos por extensión y por comprensión. Se resalta que, una vez se realizó el trabajo con las situaciones adidácticas de acción, formulación y validación y didáctica de institucionalización, ellos lograron superar los vacíos que tenían en los conceptos previos, además lograron hacer la distinción adecuada entre relación y función, y entre dominio, codominio y rango, también mejoraron notablemente respecto de la utilización de los diferentes registros de representación para el concepto de función y las transformaciones entre ellos, lo anterior se logró por medio de devoluciones de problema y retroalimentaciones, con el fin de que tomaran conciencia de los errores y comprendieran los conceptos con la ayuda de los demás compañeros y el profesor.

Así pues, se observó que los estudiantes enfrentaron con habilidad la variedad de situaciones propuestas en las que lograron plantear y responder preguntas en y con las matemáticas, así como apropiarse del lenguaje y las herramientas matemáticas relacionadas con el concepto de función, lo cual corresponde a las competencias definidas por Niss (2015), por lo que se puede deducir, que se alcanzó el objetivo planteado en la investigación.

De otro lado, teniendo en cuenta los análisis preliminares desde las dimensiones histórico-epistemológica, didáctica y cognitiva, se concluye que, para la enseñanza del concepto de función, no se consideran los siguientes aspectos:

- *La historia*, en palabras de Amaya (2020) la dimensión histórica es muy importante dado que, dicho concepto ha sido “un elemento fundamental del desarrollo histórico de la humanidad” (p. 116). En la misma línea autores como Riscanevo et al., (2011) expresan que el concepto de función ha ido evolucionando a través de la historia y “que le llevó a la humanidad muchos siglos lograr su desarrollo, en un proceso en el que se consolidaron distintas formas de representación e interpretación” (p. 124) y refieren además los autores que es relevante que los profesores conozcan la historia de dicho concepto para que conozcan los obstáculos que pueden presentar los estudiantes en el aprendizaje del mismo.
- *Los diferentes sistemas de representación semiótica y las transformaciones entre ellos*, en tal sentido, Duval (1999, p. 28) resalta la importancia de “ver en las representaciones semióticas un soporte para las representaciones mentales y en estimar que se pasa espontáneamente de la forma que representa al contenido representado”. En relación al concepto de función Andrade y Saraiva (2012, p. 137) refieren que “la coordinación que los estudiantes hacen entre los diversos registros de representación de una función y diferentes funciones, les permite lograr diferentes perspectivas de una función.
- *Problemas de aplicación contextualizados*, en tal perspectiva Amaya (2020) expresa que, en la enseñanza del concepto de función, “no se promueve el análisis de situaciones en condiciones de variación y cambio, donde se facilite asignar significado y sentido a las funciones analizadas” (p. 111). De igual forma, Cuevas y Díaz (2014); Riscanevo et al., (2011) y Sierpiska (1992) afirman que para mejorar la enseñanza del concepto de función es relevante presentarles problemas de aplicación de la vida cotidiana en las que puedan evidenciar regularidades y cambios, además de que puedan modelar por medio de funciones las situaciones observadas.

Así mismo, de los análisis preliminares desde las dimensiones histórico-epistemológica, didáctica y cognitiva del concepto de función, se concluye que, la enseñanza que prevalece es la tradicional, que se enmarca en el paradigma didáctico dominante denominada por Chevillard (2015) «Paradigma Monumentalista». Este tipo de enseñanza propicia un aprendizaje de tipo memorístico y priva a los estudiantes de construir el concepto para una mayor comprensión del mismo. Por lo que se puede considerar que un obstáculo en la enseñanza del concepto de función es el posicionamiento ontológico y epistemológico del profesor. En tal sentido, Riscanevo et al., (2011) consideran que el aprendizaje del concepto de función se queda limitado porque la enseñanza es de manera instrumental, lo que no se corresponde con las actuales exigencias curriculares. Frente a lo anterior, se invita a abordar el proceso de

enseñanza y aprendizaje del concepto de función desde lo que plantea Brousseau (1986) en la teoría de situaciones didácticas, en la que el estudiante tenga un rol más activo en la construcción de los conceptos matemáticos.

Conclusiones

Teniendo en cuenta los análisis preliminares desde las dimensiones histórico-epistemológica, didáctica y cognitiva, se concluye que, para la enseñanza del concepto de función, no se considera la historia, los diferentes sistemas de representación semiótica y las transformaciones entre ellos; se abordan problemas de aplicación descontextualizados, la enseñanza que prevalece es la tradicional, lo que priva a los estudiantes de construir el concepto para una mayor comprensión del mismo. Por lo que se puede considerar que un obstáculo en la enseñanza del concepto de función es el posicionamiento ontológico y epistemológico del profesor.

En cuanto a la confrontación de los análisis a priori y a posteriori, se concluye que los estudiantes inicialmente tenían dificultad para determinar si una relación es función, la diferencia entre codominio y rango, y para encontrar la regla de correspondencia, pero una vez se realizó el trabajo con las situaciones adidácticas de acción, formulación y validación y didáctica de institucionalización, ellos lograron hacer la distinción adecuada entre relación y función, así como identificar el dominio, codominio y rango y superar los vacíos en los conceptos previos, mejoraron notablemente respecto a la utilización de los diferentes registros de representación del concepto de función: sagital, tabular, gráfico, algebraico, escrito y verbal, y realizaron transformaciones entre ellos, lo cual se logró por medio de devoluciones de problema y retroalimentaciones.

En relación con las competencias definidas por Niss (2015), se evidenció que los estudiantes enfrentaron con habilidad la variedad de situaciones propuestas en las que lograron *pensar y razonar matemáticamente* realizando abstracciones y generalizaciones para la definición del concepto de función, variable dependiente, independiente, dominio, codominio, rango. Así también lograron *resolver diferentes problemas de aplicación*, para lo cual *modelaron matemáticamente* las situaciones haciendo uso de *símbolos y herramientas matemáticas* relacionadas con el concepto de función, además utilizaron e interpretaron diferentes *sistemas de representación semiótica* y realizaron transformaciones entre ellos, logrando con lo anterior *comunicarse matemáticamente*; además realizaban validaciones de las respuestas a las situaciones planteadas con los compañeros y la profesora, dando *argumentos matemáticos* formales e informales para justificar las soluciones propuestas. Así también, se destaca que los estudiantes utilizaron de manera adecuada la herramienta del Geoplano para dar respuestas a las situaciones didácticas de la categoría 3. Teniendo en cuenta lo anterior se puede decir que se alcanzó el objetivo planteado en la presente investigación.

De otro lado, se destaca que los estudiantes manifestaron que les gusta más la metodología que se implementó que la tradicional, porque las clases son amenas, se fortalece el trabajo en equipo, se genera la necesidad de aprender, están más atentos a las retroalimentaciones y pueden discutir en grupo sobre diversas soluciones a las situaciones propuestas.

Referentes Bibliográficas

- Andrade, J., & Saraiva, M. (2012). Múltiplas representações: Um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 137-169. <https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v15n2/v15n2a2.pdf>
- Amaya, T. (2020). "Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de Futuros Profesores de Matemáticas en el Desarrollo de una Clase Utilizando Funciones". *Bolema*, Rio Claro (SP), 34(66), 110-131. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06>
- Apóstol, T. (1999). *Calculus, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (Segunda edición). Barcelona, España: Editorial Reverte, S. A.
- Artigue, M. (1988). Ingeniería didáctica (Trad. Delgado, C.). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3): 281-308. <https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>
- Artigue, M. (1998). The evolution of problems in didactics of analysis. *Research in Didactics of Mathematics*, 18(2), 231-262. <https://revue-rdm.com/1998/l-evolution-des-problematiques-en/>

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathematiques*, 7(2), 33-115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>
- Castro, C., & Díaz, L. (2012). Propuesta de enseñanza del concepto de función para estudiantes de educación superior. En Obando, Gilberto (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 1229-1234). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Cervi, A., & Nehring, C. (2021). Sentidos atribuídos pelos estudantes na significação do conceito função: correspondência, relação, dependência e variação. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 16(3), 522–537. <https://doi.org/10.14483/23464712.17022>
- Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. En *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer International Publishing. Seoul, Korea, pp. 173-187. doi: 10.1007/978-3-319-12688-3_13
- Correa, C., & García, E. (2020). “Elaboración e implementación de secuencias didácticas para la construcción del concepto de función en estudiantes de básica secundaria”. *Dialéctica*, 1. <https://www.revistas-historico.upel.edu.ve/index.php/dialectica/article/view/8200/4813>
- Costa, V., & Sombra, L. (2019). “Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico”. *Bolema*, Rio Claro (SP), 33(63), 67-87. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a04>
- Cuevas, C., & Díaz, J. (2014). “La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función”. *El Cálculo y su Enseñanza*, 5, 165-179. <http://funes.uniandes.edu.co/14907/>
- Delgado, C., & Azcárate, C. (1996). Study on the evolution of graduate students' concept images while learning the notions of limit and continuity. *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia (España), 2, 289-296. <https://studylib.es/doc/8807079/pme--20--study-on-the-evolution-of-graduate-students--co>
- Díaz, J. (2008). El concepto de función: Investigaciones y Enseñanza. *Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. https://www.academia.edu/1570765/EL_CONCEPTO_DE_FUNCION_INVESTIGACIONES_Y_ENSEÑANZA
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. (Trad. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía). México: Grupo de Educación Matemática.
- Espinoza, G. (2020). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.
- Farfán, R., & García, M. (s.f.). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 18. Cinvestav-IPN México. <http://funes.uniandes.edu.co/5974/1/FarfanElconceptoAlme2005.pdf>
- García, K., Barrera, F., & Reyes, A. (2-4 de mayo de 2018). “Tareas de covariación en diferentes contextos para promover el entendimiento del concepto de función” (Conferencia). *Memorias del Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas*, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán.
- Higuera, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada, Granada.
- Hussain, A., & Mohammed, M. (2022). Concepto de función de los estudiantes universitarios de Cálculo 1, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(2), 251-268. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1798526>
- Mena, A., & Henao, F. (2018). Enseñanza y aprendizaje de la función lineal: Un estudio desde la teoría modos de pensamiento (Trabajo de Maestría). Universidad de Medellín. Medellín, Colombia.
- Niss, M. (2015). Competencias matemáticas y Pisa (Trad. Delgado, C.). En: Stacey, K. & Turner, R. (eds.), *Assessing Mathematical Literacy*, Springer International Publishing Switzerland pp, 35-55.
- Ospina, G. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Manizales. Departamento de Educación.



- Riscanevo, L., Cristancho, K. y Fonseca, C. (2011). "Influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función". *Praxis & Saber*, 2(3), 119-137. <https://www.redalyc.org/pdf/4772/477248387007.pdf>
- Roldán, C. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, Bogotá, Colombia.
- Sierpiska, A. (1992). "On understanding the notion of function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America". *Notes Series*, 5, 23-58. https://www.researchgate.net/publication/238287243_On_understanding_the_notion_of_function
- Trujillo, M., Castro, N., & Delgado, C. (2007). El concepto de función y la teoría de situaciones. Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras graficadoras. Bogotá, D.C.: Universidad de la Salle, Departamento de Ciencias Básicas.
- Ugalde, W. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 14(1), 1-48. <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1564>
- Youschkevitch, A.P. (1976). "The concept of function up to the middle of the 19th century", *Arch. Hist. Exact. Sci*, 16. pp. 37-85. Traducción: Dra. Rosa María Farfán.